Calcul vectoriel

1. Objets mathématiques.

1.1 Scalaire.

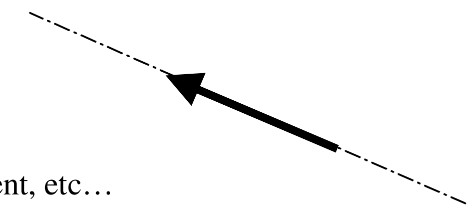
Un scalaire est un **nombre réel** qui permet d'exprimer des grandeurs physiques à une dimension, telles que l'intensité, la tension, une distance, la masse, le temps, etc….

Ex : U = 120 V ; I = 2 A ; L = 100 m ; m = 70 kg ; t = 5 s

1.2 Vecteur.

Un vecteur est un objet mathématique qui permet de représenter (modéliser) des grandeurs physiques qui sont définies par (dans l'odre) :

- ♣ Une direction
- ♣ Un sens
- ♣ Une norme



Exemples : la vitesse, l'accélération, une force, un moment, etc…

En pratique :

- La **direction** est définie par un *vecteur unitaire*
- Le **sens et la norme** sont définies par une *valeur algébrique*, (grâce à l'orientation du vecteur unitaire).

Exemple : $\vec{V} = v.\vec{x}_2$ avec $v \in \Re$ et $\|\vec{x}_2\| = 1$

Il faut pouvoir définir le vecteur unitaire $\vec{x}_2$: son orientation est définie par rapport à une basse orthonormé directe de référence, du type $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, à l'aide d'un maximum de trois rotations (voir cours de paramétrage).

Nous utilisons souvent une seule rotation.

Conclusion : pour définir le vecteur $\vec{V}$, il faut les éléments suivants.

$$\vec{V} = v.\vec{x}_2$$

avec

$$v \in \Re \text{ et } \alpha \in \Re$$

$(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ base orthonormé directe de référence (connue)

et $\|\vec{x}_2\| = 1$

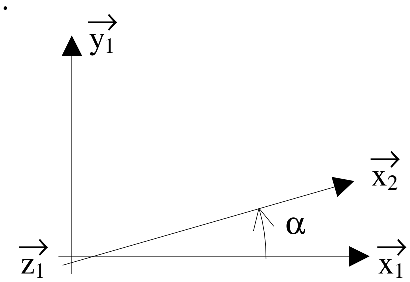


Figure d'angle plane

Avec ces éléments, les vecteur $\vec{V}$ est parfaitement défini.

Il est en aucun cas nécessaire d'écrire les coordonnées de $\vec{V}$ dans $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ pour en savoir plus (surtout pas).

2. Opérations vectorielles.

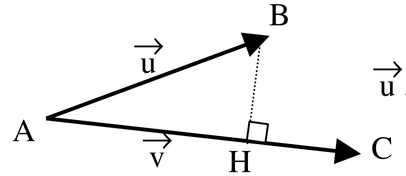
2.1 Produits scalaire.

Le produit scalaire est une application qui prends pour **arguments 2 vecteurs** et qui renvoie comme *résultat un **scalaire***.

Tel que sa valeur algébrique soit égale au produit des normes des deux vecteurs multiplié pas le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u} \,.\, \vec{v}\,)$

Remarque : le cosinus correspond à une projection orthogonale de l'extrémité d'un vecteur sur l'autre vecteur.



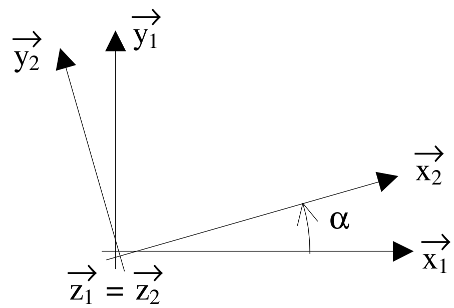
$\vec{u} \,.\, \vec{v} = AC.AH$

En pratique :

En S.I., la bonne méthode consiste à ne faire des produits **scalaires** qu'entre des vecteurs unitaires.

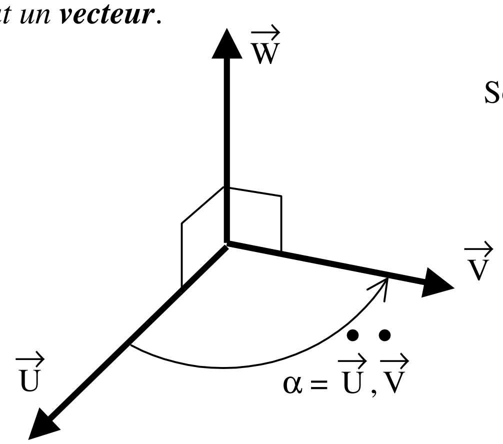
Soit la base orthonormée directe $(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ définie par rapport à $(\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ par une rotation autour de $\vec{z_1}$ selon la figure plane ci-contre.

Tous les produits scalaires doivent être calculés à partir de figures planes comme celle ci.



2.2 Produit vectoriel.

Le produit vectoriel est une application qui prends pour **arguments 2 vecteurs** et qui renvoie comme *résultat un **vecteur***.



Soit $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

Caractéristiques du vecteur $\vec{W}$.

- Direction : perpendiculaire au deux $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
- Sens : tel que la base $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ soit directe.
- Norme : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.|\sin(\alpha)|$

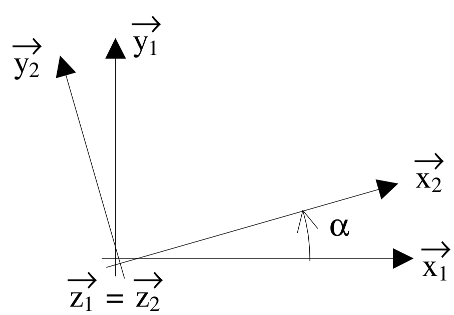
Choisir le sinus > 0

En pratique :

En S.I., la bonne méthode consiste à ne faire des produits **vectoriels** qu'entre des vecteurs unitaires.

Soit la base orthonormée directe $(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ définie par rapport à $(\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ par une rotation autour de $\vec{z_1}$ selon la figure plane ci-contre.

Tous les produits vectoriels doivent être calculés à partir des figures planes comme celle ci.



2.3 Dérivation d'un vecteur / temps : relation de Boor.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_2 + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{U}$$

- **Définition de $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$** :

c'est le vecteur vitesse de rotation du solide 2 par rapport au solide 1 (en rad/s).

Si la position de 2 est défini dans 1 par n rotations autour des directions $\overrightarrow{z_i}$ (voir figures planes)

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i . \overrightarrow{z_i}$$

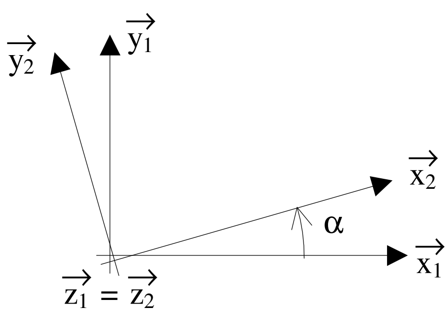
- **Composition des vecteurs vitesse de rotation** : à l'aide de la relation de Boor

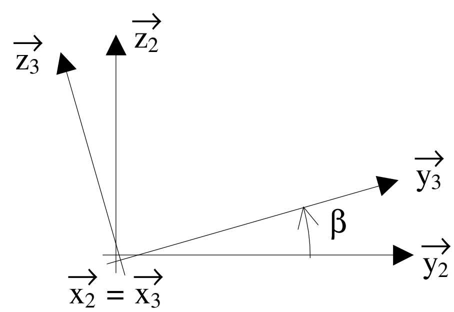
$$\overrightarrow{\Omega}_{n/1} = \overrightarrow{\Omega}_{n/n-1} + \ldots + \overrightarrow{\Omega}_{3/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \qquad \text{On montre alors :} \qquad \overrightarrow{\Omega}_{2/1} = -\overrightarrow{\Omega}_{1/2}$$

2.4 Erreurs à ne pas faire.

- **Écrire systématiquement les coordonnées des vecteurs** dans une base de référence. Il est possible qu'un vecteur soit définie à partir de plusieurs vecteurs unitaires issus de bases différentes.
- Effectuer un calcul de produit scalaire ou de produit vectoriel avant d'avoir décomposé les arguments en fonction de vecteurs unitaires.
- Ne pas connaître des lignes trigonométriques.
- Confondre, coordonnées et produits scalaire.

3. Illustrations.





♣ les expressions déterminées à partir des figures planes sont-elles VRAIES ou FAUSSES ?

$\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{x_1} = \cos\alpha$	$\overrightarrow{x_2} = \cos\alpha.\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{y_1}$	$\overrightarrow{x_2} = \cos\alpha.\overrightarrow{x_1} + \sin\alpha.\overrightarrow{y_1}$	$\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{x_1} = -\cos\alpha.\overrightarrow{z_1}$

♣ Exprimer en fonction de α, β et éventuellement des vecteurs unitaires, les expressions suivantes :

$\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{z_2}$	$\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{y_1}$
$\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_2}$	$\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{y_1}$
$(a.\overrightarrow{y_1} + b.\overrightarrow{x_2}).(c.\overrightarrow{y_3} + d.\overrightarrow{z_2})$		$(a.\overrightarrow{y_1} + b.\overrightarrow{x_2}) \wedge (c.\overrightarrow{y_3} + d.\overrightarrow{z_2})$	